

CAPITULO VII: MLSE Y DISEÑO ESTADISTICO.



Miguel Ángel Lagunas, Ana I. Pérez-Neira

CAPITULO VII: MLSE Y DISEÑO ESTADISTICO.

VII.1. INTRODUCCION.....	7.3
VII.2. DETECTOR MLSE.....	7.4
VII.3. MLSE CON CSI.....	7.7
VII.4. MLSE SIN CSI.....	7.8
VII.5. DISEÑO ESTADISTICO MIMO CON CSI..	7.10
VII.6. DISEÑO ESTADISTICO MIMO SIN CSI....	7.13
VII.7. IMPACTO DE LA PRESENCIA DE L.O.S..	7.13
VII.8. RESUMEN.....	7.16
VII.9. REFERENCIAS.....	7.17

VII.1. INTRODUCCION.

El presente capítulo es, en cierto modo, una revisión de los conceptos vistos en el capítulo II sobre detector ML. En dicho capítulo se analizó el caso del detector ML para un solo símbolo. Ahora, visto el potencial del sistema MIMO para la transmisión simultánea de múltiples streams se extenderá el modo de operación del detector al caso multi-stream.

Si bien el objetivo anterior justificaría la exposición que este capítulo contendría, se hace necesaria una revisión de conceptos de procesamiento lineal en MIMO antes de pasar al capítulo ocho que contendrá el procesamiento no-lineal o codificación espacio-temporal. El lector podrá contemplar cuán próximo está el concepto de lo que es viable en canal MIMO sin CSI con la noción de codificación. La ausencia de CSI en el transmisor obliga a realizar un procesamiento, digamos de solo fase en el transmisor. Este concepto de solo fase, propio de canales SISO, se extiende a canales MIMO en lo que se denominan matrices de proceso ortonormales.

Dado que la ausencia de CSI dificulta cotas elevadas de calidad en la transmisión, se introducirá el concepto de múltiples accesos al canal así como el preprocesado sin CSI que dichos múltiples accesos al canal dictan en aras a la calidad del sistema conseguido. Estas nociones serán de gran utilidad para comprender mejor las diferencias estructurales que códigos bloque y convolucionales espacio-tiempo presentan. Dentro de esta línea será más fácil comprender las ventajas de complejidad que representa el empleo de códigos ortogonales bloque.

En continuidad con lo anterior, el capítulo revisa lo que se ha dado en denominar diseño estadístico del procesamiento MIMO. Es claro que la mayor parte de los conceptos expresados en la literatura del tema tuvieron su origen, y su éxito, en canales cable o sistemas de diversidad en frecuencia. En estos sistemas la existencia de CSI instantáneo en el transmisor no es una quimera, es fácil de medir con precisión y muy fácil, dada su escasa variabilidad con el tiempo, de incluir en la trama del sistema de transmisión. Es obvio que el canal radio presenta un escenario muy diferente. En este sentido, se antoja pretencioso el pensar que existirá full CSI e instantáneo en el transmisor. Al mismo tiempo, esquemas de lo que se denomina modulación adaptativa, también originaria de sistemas cable y satélite, cada vez se configuran como la única alternativa de CSI válido para Tx en sistemas radio. Si se ha de caracterizar modulación adaptativa en pocas palabras, podría decirse que esta técnica consiste en proporcionar un CSI tan solo de SNR, ausencia de información de fase, al transmisor. Es decir, es una información de CSI que tiene dos características, o limitaciones si se prefiere, básicas. La primera es que carece de información de fase como ya se ha mencionado; y la segunda, que constituye o proviene de un promedio de medidas o comportamiento a largo plazo del canal que se trata de sobrepasar. En estas condiciones de CSI, el presente capítulo formulará como es la tasa de error promedio y proporcionará las soluciones correspondientes a que exista CSI del tipo mencionado, solo de SNR y también al caso de no CSI pero manteniendo el objetivo en tasa de error promedio.

El contenido es absolutamente imprescindible para abordar el tema de codificación espacio temporal que sigue al presente capítulo.

VII.2. DETECTOR MLSE.

El esquema de partida será el mismo, que incluye proceso en el transmisor, canal y proceso en el receptor, que el empleado hasta ahora y que se reproduce en la Figura 7.1.

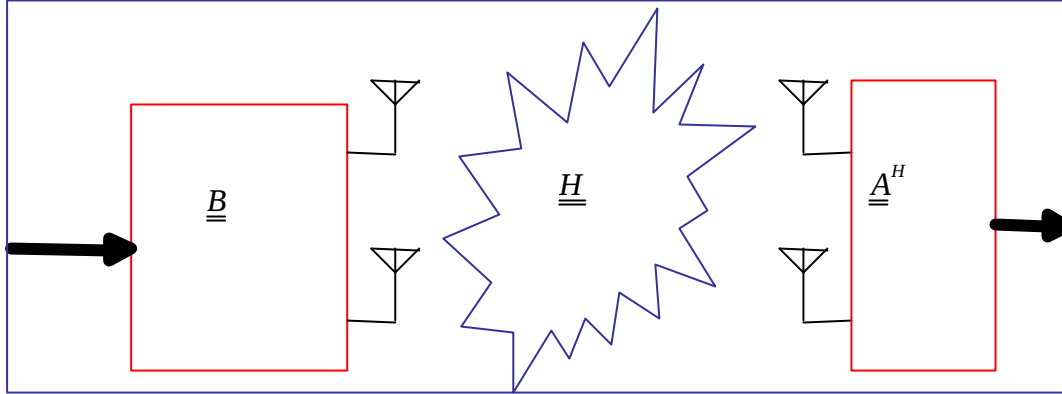


Figura 7.1. Esquema habitual para el proceso canal MIMO.

Dentro de la arquitectura anterior es de destacar la descomposición en tres bloques que admite el transmisor y que se presenta en la Figura 7.2.

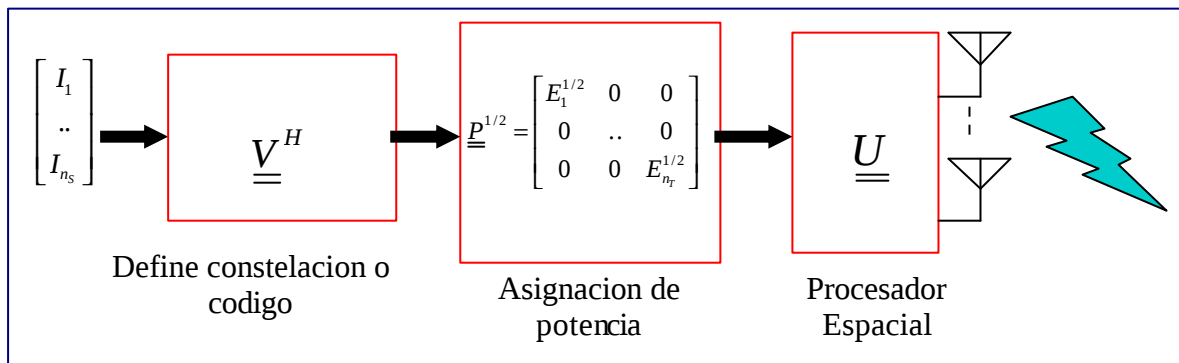


Figura 7.2. Descomposición del proceso del transmisor en tres bloques diferenciados de procesamiento temporal, espacial y asignación de potencia.

Dados estos tres bloques es claro que el papel de cada uno de ellos se hace más evidente. El bloque de la derecha es un conjunto de conformadores que condicionan el canal disponible lo mejor posible. La mejor opción ya conocida es los auto vectores de su descomposición SVD, pero también se ha descrito como para entornos multiusuario dichos conformadores provienen de la matriz Q de la descomposición QR del canal. En cualquiera de los casos se ha de pensar en un nuevo canal de comunicación cuya matriz vendría dada por (7.1) donde ya se incluye el mejor o más conveniente procesador temporal. Nótese que en ausencia de CSI instantáneo esta matriz no existirá o, en el mejor de los casos, estará formada por beamformers que generan haces mas o menos ortogonales en todas las direcciones de interés, incluso de manera pseudo aleatoria. Esta ultima interpretación se usara con detalle en el capítulo dedicado específicamente a técnicas multiusuario mas adelante.

$$\underline{\underline{U}}.\underline{\underline{H}} \Rightarrow \text{nueva } \underline{\underline{H}} \quad (7.1)$$

El segundo bloque o de asignación de potencia a cada modo del canal es el que denota la importancia que el diseñador dará al uso de cada uno de los modos del canal, o a cada antena en caso de no existir procesador temporal por ausencia de CSI. Este bloque adopta formas no lineales, denominadas en el capítulo anterior como control de potencia en el transmisor, cuando se emplea TH o SE.

Por ultimo, el bloque mas relevante en este capítulo será la matriz $\underline{\underline{V}}$. Básicamente esta matriz cambia de las n_s entradas binarias a un numero igual o inferior al numero de modos del canal o antenas n_r . Obviamente, este bloque puede entenderse también como el constructor de la constelación de símbolos a partir de los bits de entrada. Su papel será crucial en lo que sigue. Es de destacar que, en algunas ocasiones y para no abusar de formulación, se considerara que la asignación de potencia se encuentra incluida en dicha matriz.

Pasando a formular el detector ML, la expresión de la verosimilitud aparece a continuación en (7.2). En esta expresión puede observarse como se ha incluido la opción de realizar N accesos al canal con la misma información pero cambiando la constelación o energía en cada acceso. Esto motiva la inclusión del índice n en la matriz mencionada en el párrafo anterior.

$$\mathfrak{S}(\underline{\underline{I}}_0) = -\sum_{n=1}^N \left| \underline{\underline{X}}_n - \underline{\underline{H}}\underline{\underline{U}}\underline{\underline{V}}_n \cdot \underline{\underline{I}}_0 \cdot \sqrt{E_s} \right|^2 / 2 \cdot N_0 \quad (7.2)$$

Asumiendo ahora que el posible vector, candidato a decidir en lugar del correcto, se le denomina como $\underline{\underline{I}}_d$ entonces, si el símbolo correcto es el de (7.2), se tendrá que verificar (7.3), donde también se ha definido el vector error.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\underline{\underline{I}}_0) &\geq \mathfrak{S}(\underline{\underline{I}}_d) \\ \underline{\underline{\tilde{I}}}_0 &= \underline{\underline{I}}_0 - \underline{\underline{I}}_d \end{aligned} \quad (7.3)$$

Después de breves manipulaciones y denominando como $\underline{\underline{W}}_n$ el ruido recibido en cada acceso, se puede escribir (7.4).

$$\begin{aligned} \text{Trace}[\underline{\underline{R}}_H \cdot \underline{\underline{A}}] &\geq \text{Re} \left\{ \text{Trace} \left[\underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \sum_{n=1}^N \underline{\underline{W}}_n \cdot \underline{\underline{\tilde{I}}}_0^H \cdot \underline{\underline{V}}_n \right] \right\} \\ \underline{\underline{R}}_H &= \underline{\underline{U}}^H \cdot \underline{\underline{H}}^H \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad \text{and} \quad \underline{\underline{A}} = \sum_{n=1}^N \underline{\underline{V}}_n^H \cdot \underline{\underline{\tilde{I}}}_0 \cdot \underline{\underline{\tilde{I}}}_0^H \cdot \underline{\underline{V}}_n = \sum_{n=1}^N \underline{\underline{f}}_n \cdot \underline{\underline{f}}_n^H \end{aligned} \quad (7.4)$$

En esta expresión puede verse que, para que no exista un error la variable aleatoria de la derecha ha de ser inferior a la cota determinista de la izquierda. Esa variable aleatoria es gaussiana, incorrelada espacialmente, de media nula y varianza precisamente igual al termino de la izquierda de la desigualdad, salvo el factor N_0 o densidad espectral del ruido. En definitiva, la probabilidad de error, o situación en la que la variable aleatoria es mayor que el umbral vendrá dada por (7.5).

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_d) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2.N_0} \cdot \text{Trace}[\underline{R}_H \cdot \underline{A}]}\right) \quad (7.5)$$

Gráficamente puede verse esta expresión del error en la Figura 7.3.

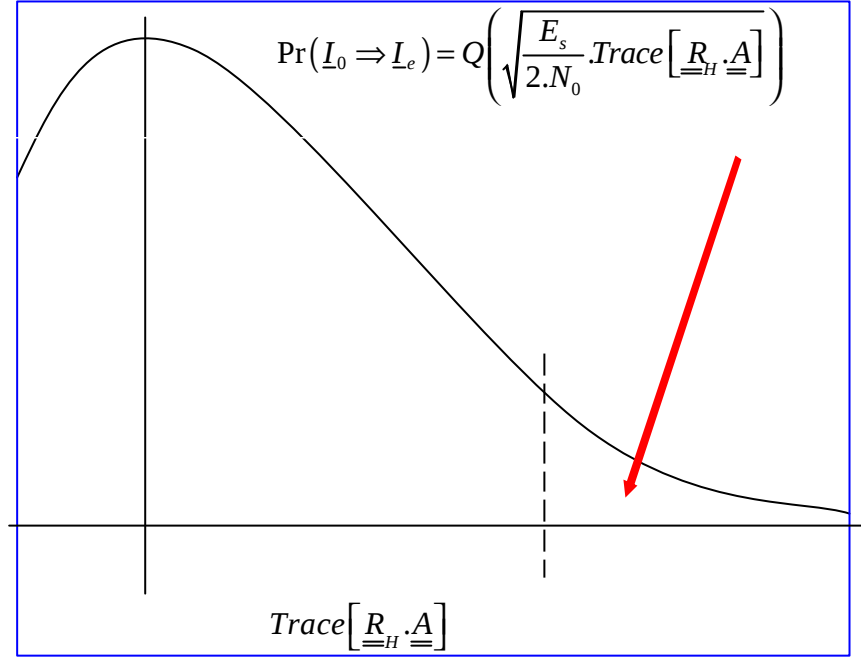


Figura 7.3. Interpretación grafica de la probabilidad de error en un detector ML.

Para proseguir, se considerara que un diseño adecuado del sistema conducirá al que el error más probable a cometer sobre un vector de n_s componentes se produzca tan solo en un stream. Si se denomina con el subíndice s al stream en el que se comete el error, entonces solo la componente s del vector $\tilde{\underline{I}}_0$ será distinta de cero y valdrá ± 2 . En consecuencia, tan solo la columna correspondiente a dicho índice en la matriz $\underline{V}_n^H$ pasara a intervenir en la probabilidad de dicho error.

$$\underline{V}_n^H \cdot \tilde{\underline{I}}_0 \rightarrow \text{stream } \#s \rightarrow 4 \cdot \underline{v}_{s,n} \text{ columnas de } \underline{V}_n^H \quad (7.6)$$

En definitiva, minimizar dicha probabilidad de error equivaldrá a maximizar (7.7).

$$\text{Trace}\left[\underline{R}_H \cdot \sum_{n=1}^N \underline{v}_{n,s} \cdot \underline{v}_{n,s}^H\right] \quad (7.7)$$

Antes de continuar con el diseño, tanto en presencia como ausencia de CSI instantáneo, se asumirá que se desea una solución igual para todos los streams o “fair”, es decir, la expresión anterior habrá de valer lo mismo al margen del índice s . Los siguientes apartados examinan las dos alternativas existentes.

VII.3 MLSE CON CSI.

Examinado la expresión a maximizar e imponiendo previamente la restricción de justicia para todos los streams, se requerirá elegir la matriz de constelación de modo y manera que se verifique (7.8).

$$\underline{v}_{s,n}^H \underline{R}_{\underline{H}} \underline{v}_{s,n} = b_0 \quad \forall n=1, N; s=1, n_s \quad (7.8)$$

Verificar la condición anterior es fácil de traspasar a un nuevo vector como se indica en (7.9).

$$\underline{v}_{s,n} = \frac{b_0^{1/2} \cdot \underline{a}_{s,n}}{\left(\underline{a}_{s,n}^H \underline{R}_{\underline{H}} \underline{a}_{s,n} \right)^{1/2}} \quad (7.9)$$

Con esta elección, la energía total transmitida pasa a ser (7.10).

$$E_T = b_0 \cdot E_S \cdot \sum_{s=1}^{n_s} \frac{1}{\underline{a}_{s,n}^H \underline{R}_{\underline{H}} \underline{a}_{s,n}} \quad (7.10)$$

Y, por ultimo, la probabilidad de error es:

$$\Pr^{CSI} (I_0 \Rightarrow I_e) = Q \left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_T}{N_0} \cdot \frac{N}{\sum_{s=1}^{n_s} \frac{1}{\underline{a}_{s,n}^H \underline{R}_{\underline{H}} \underline{a}_{s,n}}}} \right) \quad (7.11)$$

Claramente la minimización de la probabilidad de error, como no podía ser de otro modo, conduce al empleo en todos los accesos al canal del auto vector máximo de la matriz del canal. Tan solo una constante en cada acceso estaría pendiente de diseño. Aun más, dado que se esta analizando la situación de full CSI, es lógico suponer que el canal ya se encuentra diagonalizado al auto vector máximo; si esta es la situación, el mejor diseño por realizar es seleccionar el autovalor máximo (el primero) de la matriz diagonalizada salvo la constante mencionada.

$$\underline{a}_{s,n}^H = j(s,n) \cdot [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (7.12)$$

En relación a la constante anterior, existen dos alternativas aparentes, aunque realmente no es así y la solución mejor es única. La alternativa que no resulta valida seria empaquetar todos los streams en un solo símbolo n_s -QAM. El problema de las constelaciones de gran tamaño sobre dos dimensiones, i-q tan solo, es que escalan muy mal su energía total transmitida. En formulas, esta opción llevaría a (7.13) como su probabilidad de error.

$$\Pr_{QAM}^{CSI}(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_T}{N_0} \cdot \left[\frac{3.N}{2^{n_s}-1}\right] \cdot I_{\max}(\underline{R}_H)}\right) \quad (7.13)$$

A igual ancho de banda, la solución más interesante es incrementar el número de dimensiones, es decir, realizar cada acceso en una frecuencia diferente. Este es el caso de usar OFDM como transporte, es decir, la matriz de constelación sería (7.14) y la probabilidad de error (7.15).

$$\underline{V}_n^H = \begin{bmatrix} \dots \exp(-2p j.n.s / N) \dots \\ 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$\Pr_{OFDM}^{CSI}(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_T}{N_0} \cdot \left[\frac{N}{n_s}\right] \cdot I_{\max}(\underline{R}_H)}\right) \quad (7.15)$$

De la comparación de (7.13) con (7.15) el lector puede comprender la superioridad del empleo de constelaciones simples sobre gran número de dimensiones, en lugar de constelaciones complicadas sobre diversidad i-q. Por lo anterior, se tomara en lo que sigue, como referencia del caso CSI instantáneo la expresión (7.15), siendo n_s/N el bit-rate del sistema. Por otra parte, en (7.13), si la matriz de canal cambiase en cada acceso sería necesario cambiar la constelación.

VII.4. MLSE SIN CSI.

Cuando no existe CSI disponible, la única opción para maximizar (7.7), manteniendo el criterio de justicia en el error, es conseguir que, a lo largo de los N accesos las columnas de la matriz de constelación sumen la identidad, salvo una constante. Es decir, ha de verificarse (7.16).

$$\text{Trace}\left[\underline{R}_H \cdot \sum_{n=1}^N \underline{v}_{n,s} \cdot \underline{v}_{n,s}^H\right]_{MAX} \Rightarrow \sum_{n=1}^N \underline{v}_{n,s} \cdot \underline{v}_{n,s}^H = b_0 \cdot \underline{I} \quad \forall s \quad (7.16)$$

Obsérvese que se considera que la matriz de canal es constante durante los N accesos al canal. Con este diseño, en donde se realiza UPA, la tasa de error pasa a ser (7.17), y se hace evidente las pérdidas al no disponer de CSI cuando se compara esta expresión con (7.15), cuando se disponía de CSI.

$$\Pr^{NO-CSI}(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_T}{N_0} \cdot \frac{N}{n_s} \cdot \frac{\text{Trace}(\underline{R}_H)}{n_T}}\right) \quad (7.17)$$

$$\frac{\text{Trace}\left(\sum_{n=1}^N \underline{V}_n^H \cdot \underline{V}_n\right)}{N} \cdot E_s \cdot n_s = E_T \Rightarrow E_T = \frac{n_s}{N} \cdot n_T \cdot b_0 \cdot E$$

Como podrá apreciar el lector, la diferencia entre CSI y su ausencia coincide con lo que ya se expuso en el Capítulo II. Ahora es mas claro la consecuencia que básicamente se resume en la propiedad (7.16), es decir, las matrices de constelación a emplear en cada acceso han de poseer la cualidad de que la suma por cada columna s de las matrices de rango uno ha de regenerar el rango hasta lograr la matriz identidad. Es obvio pues que el numero de accesos al canal, al no disponer de CSI no es libre y al menos ha de ser igual, o mayor, que el numero de antenas en transmisión.

Existen varias posibilidades de formar este tipo de matrices de constelación. La Figura 7.4 expone una forma sencilla basada en favores para componer las columnas de las matrices de constelación en cada acceso.

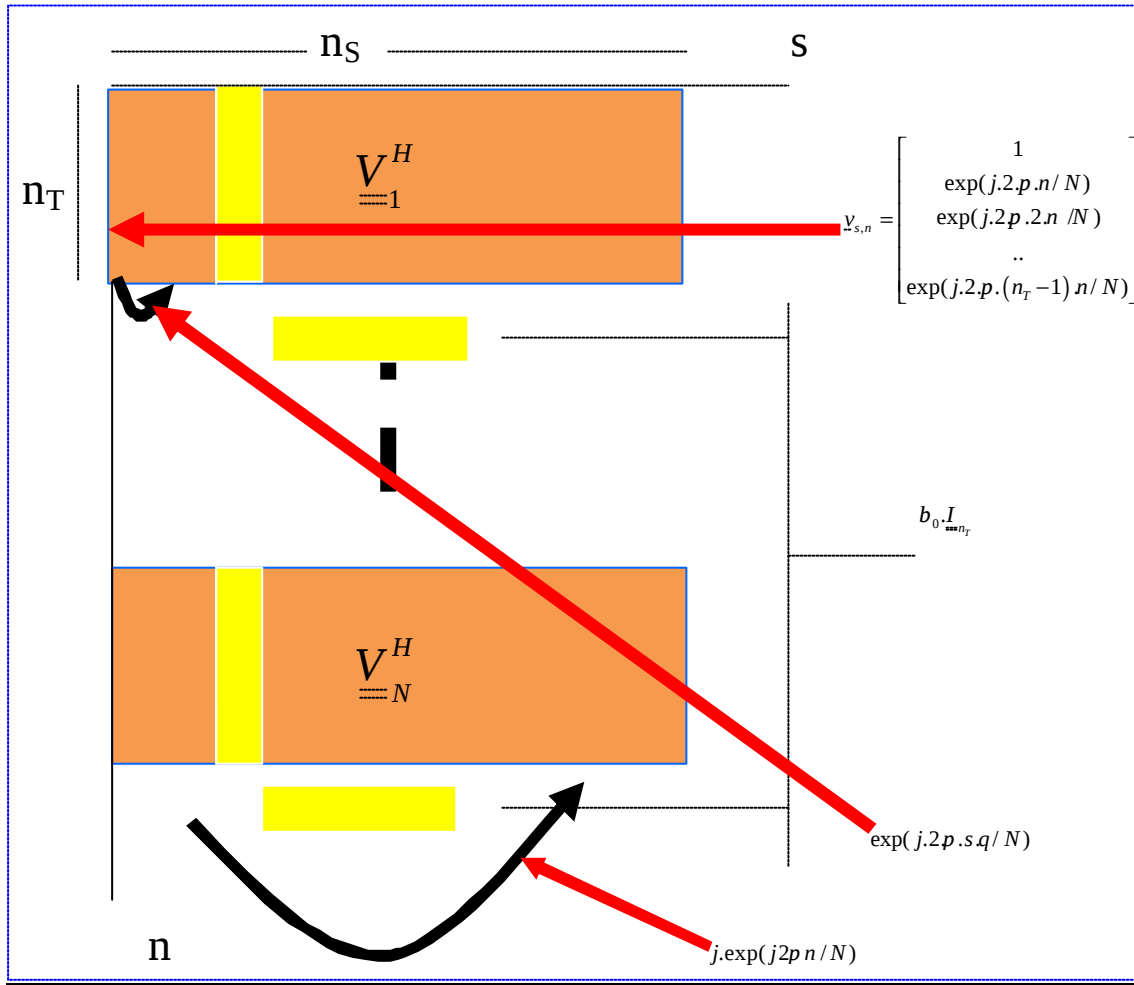


Figura 7.4. Diseño de matrices de constelación para N accesos n_s streams y n_T antenas.

A continuación se ponen dos ejemplos diferentes de matrices de constelación para cuatro streams, dos antenas y, claro esta, dos accesos al canal.

$$\begin{aligned}
 V_1^H &= \begin{bmatrix} 1 & j & 1 & j \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} & V_2^H &= \begin{bmatrix} j & 1 & j & 1 \\ -j & 1 & j & -1 \end{bmatrix} \\
 V_1^H &= \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j \end{bmatrix} & V_2^H &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -j \\ -1 & j & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Por razones que se expondrán en el próximo capítulo, la segunda opción, denominada código de Alamouti, es mas favorable que la primera. Dicha opción constituye un OSTBC (código espacio-temporal ortogonal) que se estudiara con detalle en el próximo capítulo. En cualquier caso, para un planteamiento genérico de detector ML ambas son de igual calidad y la primera tal vez mejor por crear menos fatiga en los amplificadores de transmisión y usarlo constantemente al máximo rendimiento.

A continuación puede verse la selección para el caso de tres antenas transmisoras y seis streams.

$$\underline{\underline{V}}_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & j & j & j \\ 1 & \exp(j2p/3) & \exp(j4p/3) & j & j.\exp(j2p/3) & j.\exp(j4p/3) \\ 1 & \exp(j4p/3) & \exp(j2p/3) & j & j.\exp(j4p/3) & j.\exp(j2p/3) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}}_2^H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & j.\exp(j2p/3) & j.\exp(j2p/3) & j.\exp(j2p/3) \\ \exp(j2p/3) & \exp(j4p/3) & 1 & j.\exp(j4p/3) & j & j.\exp(j2p/3) \\ \exp(j4p/3) & \exp(j2p/3) & 1 & j & j.\exp(j4p/3) & j.\exp(j2p/3) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{V}}_2^H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & j.\exp(j4p/3) & j.\exp(j4p/3) & j.\exp(j4p/3) \\ \exp(j4p/3) & 1 & \exp(j2p/3) & j.\exp(j2p/3) & j.\exp(j4p/3) & j \\ \exp(j2p/3) & 1 & \exp(j4p/3) & j & j.\exp(j4p/3) & j.\exp(j2p/3) \end{bmatrix}$$

Antes de dejar el apartado, es importante remarcar el interés de este tipo de matrices que parecen ser la única alternativa a la ausencia de CSI, incluso cuando, como en los próximos apartados se cambia de criterio de diseño del transmisor. A continuación se describirá como se modifica el diseño cuando se dispone de un conocimiento no instantáneo o parcial del canal de transmisión.

VII.5. DISEÑO ESTADISTICO MIMO CON CSI.

Volviendo a la expresión del error que en cada bloque de streams transmitidos proporciona el receptor, este puede expresarse en función de las n_R columnas de la matriz $\underline{\underline{H}}$ tal y como se expresa en (7.19).

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) \approx k_0 \cdot \exp \left[-\frac{2E_s}{N_0} \cdot \sum_{p=1}^{n_R} \underline{h}_p^H \underline{A} \underline{h}_p \right] \quad (7.19)$$

Al expresar de este modo la tasa de error, digamos instantánea, se puede plantear un criterio más pragmático de diseño en lugar de la quimera que entraña, en términos de complejidad, el minimizar su valor instantáneo. Tomando este objetivo, se ha de promediar sobre las diferentes realizaciones del canal la expresión anterior y así obtener un promedio de la tasa de error. Para realizar el promedio, se asumirá una distribución gaussiana y que, al mismo tiempo, no existe correlación en el receptor. Este último detalle es importante y esta solucionado en el caso habitual de que el receptor emplee una sola antena o emplee la mejor de las disponibles. A la larga se podrá observar lo útil y pragmático que resulta usar selección de antena en el lado receptor del canal MIMO, a

no ser que pueda garantizarse la ausencia de correlación en este lado del sistema de transmisión.

$$E_{\underline{H}} \left[\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) \right] \approx k_0 \cdot \iiint \det(\underline{\Sigma}_p^{-1}) \cdot \exp \left(\underline{h}_p \cdot \left(\underline{\Sigma}_p^{-1} + \frac{2E_s}{N_0} \cdot \underline{A} \right) \cdot \underline{h}_p \right) \quad (7.20)$$

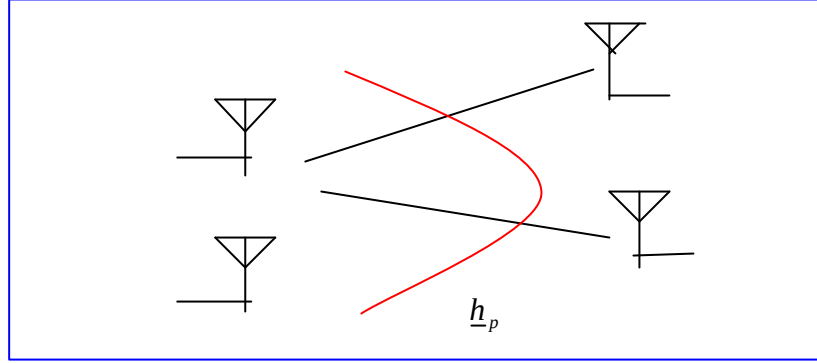


Figura 7.5 Canales vistos por cada receptora de la apertura del transmisor.

Pues bien, considerando las columnas incorreladas y una distribución gaussiana para sus componentes, el promedio de la tas de error se puede escribir como (7.20). Este promedio tiene una expresión cerrada sencilla en la que basta multiplicar y dividir por la matriz que figura en el exponente y recordar que la integral de la pdf es la unidad. Con ello, se llega al resultado (7.21) que proporciona la tas promedio de error.

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) \approx k_1 \cdot \prod_{p=1}^{n_R} \frac{1}{\det \left[\underline{I}_{n_r} + \frac{2E_s}{N_0} \cdot \underline{A} \underline{\Sigma}_{\equiv p} \right]} \quad (7.21)$$

La expresión revela que el diseño de la matriz de constelación sigue pendiente y, al mismo tiempo, que su impacto pasa de ser exponencial a ser en la forma de un determinante. También, al admitir CSI es claro que el transmisor dispone de la información correspondiente a las matrices de covarianza. Si no existe correlación en el transmisor, los valores de su diagonal no son más que SNR que cada antena receptora percibe de cada antena transmisora. Por esta razón, lo que sigue puede considerarse la extensión de sistemas SISO de modulación adaptativa al caso MIMO.

Si se asume que las matrices de covarianza son diagonales debido a la baja correlación en el transmisor. El diseño de la matriz de constelación, en concreto, la matriz $\underline{A}$ que minimiza la tasa de error también será diagonal.

$$\underline{\Sigma}_p = \text{diag}(s_{pq}) \quad y \quad \underline{A} = \text{diag}(b_q) \quad (7.22)$$

El diseño de las diagonales de esta matriz se realizara a continuación, en cualquier caso, es interesante remarcar que para que dicha matriz sea diagonal se ha de recurrir de nuevo a matrices ortogonales, es decir, las matrices de constelación para este

caso serán según (7.23), que emplea matrices que en otro contexto u objetivo fueron usada para el caso de ausencia de CSI.

$$\underline{\underline{V}}_n^H \rightarrow \left(\text{diag} [b_q] \right)^{1/2} \underline{\underline{V}}_n^H \quad (7.23)$$

Usando dichas matrices en la tasa de error promediada resulta en (7.24).

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = k_1 \cdot \prod_{q=1}^{n_r} \prod_{p=1}^{n_R} \left(1 + \frac{2E_s}{N_0} b_q \cdot s_{p,q} \right)^{-1} \quad (7.24)$$

En esta expresión se pueden usar dos aproximaciones diferentes. La primera y mas recomendable es seleccionar las antenas receptora con mejor o pareja SNR, con lo que la aproximación que sigue es bastante correcta.

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) \approx k_1 \cdot \prod_{q=1}^{n_r} \left(1 + \frac{2E_s}{N_0} b_q g_q \right)^{-n_R} \quad \text{con} \quad g_q = \left(\prod_{p=1}^{n_R} s_{p,q} \right)^{1/n_R} \quad (7.25)$$

Es decir el canal firma en el objetivo con la media geométrica, lo que conlleva el admitir solo buenas antenas receptoras. Si por el contrario no se realiza selección de antena, la aproximación ha de ser pesimista y desemboca en la media aritmética perdiendo la diversidad del receptor en el exponente, tal y como se indica en (7.26).

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) \approx k_1 \cdot \prod_{q=1}^{n_r} \left(1 + \frac{2E_s \cdot n_R}{N_0} b_q g_q \right)^{-1} \quad \text{con} \quad g_q = \frac{1}{n_R} \sum_{p=1}^{n_R} s_{p,q} \quad (7.26)$$

Es claro que es mas recomendable usar (7.25) para las buenas antenas y tomar esta como una cota inferior o peor caso y realizar sobre esta el diseño. Recuerdese que es fácil realizar selección de antena en el receptor ya que la información de SNR en cada antena receptora es fácil de obtener.

Pues bien, usando (7.25) junto con la restricción de energía total transmitida, se llega a (7.27) que se ha venido en denominar water-filling estadístico dada su similitud con el popular procedimiento para alcanzar capacidad con CSI instantáneo.

$$b_q = \left[m - \frac{1}{g_q} \cdot \left(\frac{N_0}{2E_s} \right) \right]^+ = \left[\begin{array}{l} \text{Solobuenas} \\ \text{antenas receptoras} \rightarrow \text{Todas} \\ \text{las ganancias activadas} \end{array} \right] = m - \frac{1}{g_q} \left(\frac{N_0}{2E_s} \right) \quad (7.27)$$

Es interesante hacer notar una cierta dualidad entre capacidad y calidad. En capacidad con CSI, la solución es water-filling y la maximización de la capacidad ergodica (promedio) es UPA. En tasa de error promedio la solución es water-filling estadístico y en instantáneo sin CSI es UPA.

Volviendo a la expresión de la tasa de error promedio con CSI, la expresión que resulta viene dada por (7.28).

$$\bar{P}_e^{CSI} = \left(\frac{2E_T g_0}{N_0} \right)^{-n_T \cdot n_R} \cdot \left[\frac{N}{n_s \cdot n_T} + \left(\frac{E_S}{E_T} \right) \cdot \frac{1}{n_T} \sum_{q=1}^{n_T} \frac{1}{g_q} \right]^{-n_T \cdot n_R} \quad (7.28)$$

$$\text{con } g_0 = \left(\prod_{q=1}^{n_T} g_q \right)^{1/n_T}$$

Más interesante, es la expresión (7.29), derivada directamente de la anterior.

$$\bar{P}_e^{CSI} = \left[\frac{2E_T g_0}{N_0} \frac{N}{n_s \cdot n_T} + \frac{2E_S}{N_0 \cdot n_T} \frac{g_{0,GEO}}{g_{0,HAR}} \right]^{-n_T \cdot n_R} \quad (7.29)$$

Aunque sea anticipar, podrá verse que es precisamente el cociente entre la media geométrica y la media armónica la forma en que la disponibilidad de CSI hace mejorar el objetivo. Cuando dicho cociente no es significativo, para numero de antenas elevado en el transmisor o EsNo bajas la solución será igual que no disponer de CSI, es decir, como se vera en breve, UPA.

VII.6. DISEÑO ESTADISTICO MIMO SIN CSI:

En el caso de ausencia de CSI, el único diseño posible para la matriz $\underline{\underline{A}}$ es de nuevo de una matriz identidad salvo una constante.

$$\underline{\underline{A}} = b_0 \cdot \underline{\underline{I}} \quad (7.30)$$

Con este diseño, la tasa de error promedio, al igual que antes se menciono, para el caso de antenas seleccionadas en el transmisor pasa a ser (7.31).

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = \left| \begin{matrix} \text{Caso} \\ \text{buena} \end{matrix} \right| \frac{SNR}{\left| \begin{matrix} \text{Caso} \\ \text{buena} \end{matrix} \right|} \approx k_1 \cdot \prod_{q=1}^{n_T} \left(\frac{2E_S}{N_0} b_0 \cdot g_q \right)^{n_R} \quad (7.31)$$

Que, al incluir la energía total transmitida produce (7.32). A la vista de este resultado puede comprenderse lo que se pierde en el objetivo debido a la ausencia de CSI. Estas perdidas en el canal radio pueden ser insignificantes y mas si se tiene en cuenta la diferencia de complejidad entre tener o no tener disponible CSI en el transmisor.

$$\bar{P}_e^{NO-CSI} = \left(\frac{2E_T g_0}{N_0} \right)^{-n_T \cdot n_R} \cdot \left[\frac{N}{n_s \cdot n_T} \right]^{-n_T \cdot n_R} \quad (7.32)$$

$$\text{pues } \frac{\text{Trace} \underline{\underline{A}}}{N} \cdot n_s \cdot E_S = E_T$$

Es de hacer notar que la penalización debida al número de antenas creciente en el transmisor puede no aparecer en artículos sobre el tema. Aquí aparece por considerar que no es justo hacer crecer la energía total transmitida con el número de antenas ya

que, formalmente el empleo de MIMO se sugiere para aumentar la rentabilidad o calidad del enlace sin incrementar la contaminación espectral.

VII.7. IMPACTO DE LA PRESENCIA DE L. O.S.

Muchos trabajos en la línea de lo descrito hasta el momento no proporcionan una explicación correcta ni a capacidad ni a la calidad que se obtiene en los denominados coloquialmente posición de buena cobertura radio. También en un gran número de trabajos se habla de correlación en transmisor y receptor cuando esta hipótesis no puede respaldarse desde un planteamiento electromagnético o electrónico de la instalación correspondiente. También ha de hablarse de, digamos, el abuso de una notación estadística cuando se afirma de canal Rayleigh cuando el terminal está a pocos metros de punto de acceso. Es claro que la no inclusión de una media en el modelo estadístico del canal impide explicar muchos comportamientos y confusiones de que existe correlación entre dos entradas de la matriz de canal, cuando esta es simplemente la presencia de una media no nula en ambas variables.

El presente apartado analizará el impacto que la presencia de LOS (línea de visión directa) en el canal de transmisión tiene en los diseños, tanto con CSI como sin el.

Por razones de sencillez en la presentación se supondrá tan solo una antena receptora sin limitar por ello las conclusiones parciales o globales de lo que sigue.

Básicamente la distribución del canal visto por la única antena receptora tendrá ahora una media diferente de cero.

$$\Pr(\underline{h}) = \det(\underline{\Sigma}^{-1}) \cdot \exp\left\{-\left(\underline{h} - \underline{h}_0\right)^H \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \cdot \left(\underline{h} - \underline{h}_0\right)\right\} \quad (7.33)$$

Usando la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \left(\underline{h}^H \cdot \underline{A} \underline{h}\right) \left(\underline{h} - \underline{h}_0\right)^H \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \cdot \left(\underline{h} - \underline{h}_0\right) &= \left(\underline{h} - \underline{\Phi} \underline{h}_0\right)^H \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \cdot \left(\underline{h} - \underline{\Phi} \underline{h}_0\right) \\ &+ \underline{h}_0^H \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \cdot \underline{h}_0 - \underline{h}_0^H \cdot \underline{\Phi}^H \left(\underline{\Sigma}^{-1} + \underline{A}\right) \cdot \underline{\Phi} \underline{h}_0 \end{aligned} \quad (7.34)$$

y que

$$\begin{aligned} \underline{h}_0^H \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \cdot \underline{h}_0 - \underline{h}_0^H \cdot \underline{\Phi}^H \left(\underline{\Sigma}^{-1} + \underline{A}\right) \cdot \underline{\Phi} \underline{h}_0 &= \left| \text{con} \right. \\ \underline{\Phi} &= \left(\underline{\Sigma}^{-1} + \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{\Sigma}^{-1} \left. \right| = \\ \underline{\Sigma}^{-1} - \underline{\Sigma}^{-1} \left(\underline{\Sigma}^{-1} + \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{\Sigma}^{-1} &= \left(\underline{\Sigma} + \underline{A}^{-1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

se obtiene la nueva tasa de error promedio cuando existe LOS.

$$\Pr(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = k_1 \frac{\exp \left\{ - \left(\underline{h}_0^H \left[\underline{I}_{=n_T} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{A} \left(\frac{2E_s}{N_0} \right) \right]^{-1} \cdot \underline{A} \left(\frac{2E_s}{N_0} \right) \cdot \underline{h}_0 \right) \right\}}{\det \left[\underline{I}_{=n_T} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{A} \left(\frac{2E_s}{N_0} \right) \right]} \quad (7.35)$$

Esta expresión sugiere cuanto puede ganar un sistema cuando el receptor dispone de media pues la inversión en el sistema en potencia o en diversidad se ve premiado de manera exponencial en lugar del tenue determinante del denominador. también la expresión revela que, al contrario de lo que parecen sugerir muchos autores y en línea con nuestra intuición, que la varianza no es buena y que explotarla es mucho mas difícil que explotar la media. Este comentario tiene su base en los beneficios del termino del numerador versus el denominador de la expresión anterior, pero, aun mas sorprendente, obsérvese que si la varianza no es cero, incrementar la potencia transmitida satura el termino exponencial, es decir, la calidad del sistema presenta una saturación en términos de ventajas por aumentar energía transmitida. Esta saturación no existe si la varianza es muy pequeña. En definitiva, renunciar a la presencia de LOS es renunciar a lo mejor que un canal radio puede proporcionar.

Si se procede a diseñar sin CSI, de nuevo la solución es UPA y la matriz $\underline{A}$ puede escribirse como (7.36).

$$\underline{A} = \underline{a} \cdot \underline{I} = \left(\frac{2E_T}{N_0} \cdot \frac{N}{n_s \cdot n_T} \right) \cdot \underline{I} \quad (7.36)$$

Y, al sustituirla en la expresión de la tasa de error se obtiene (7.37), donde puede apreciarse la contribución espectacular de la presencia de LOS en su numerador, en comparación a cuando este no existe y tan solo el denominador contribuye a la calidad.

$$\Pr_{NO-CSI}^{LOS}(\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = k_1 \cdot \frac{\exp \left\{ - \sum_{q=1}^{n_r} |h(q)|^2 \cdot \frac{a}{1 + a \cdot s_q^2} \right\}}{\prod_{q=1}^{n_r} (1 + a \cdot s_q^2)} \quad (7.37)$$

En el caso de no existir CSI, la formulación (7.38) del problema revela que este puede solucionarse fácilmente junto con la restricción de energía transmitida constante.

$$\begin{aligned} \ln(P_e) &= k_2 - \sum_{q=1}^{n_r} r_q \cdot \frac{b_q^0}{1 + b_q^0 \cdot s_q^2} - \sum_{q=1}^{n_r} \ln(1 + b_q^0 \cdot s_q^2) \\ \text{con } r_q &= |h(q)|^2 \quad ; \quad \underline{A} = \text{diag}(b_q) \quad \text{y} \quad b_q^0 = b_q \cdot \frac{2E_s}{N_0} \end{aligned} \quad (7.38)$$

La solución de igualar a cero el Lagrangiano, presenta dos soluciones en la que tan solo una de ellas presenta un mínimo, la que corresponde al signo más en (7.39).

$$1 + s_q^2 \cdot b_q^0 = m \cdot s_q^2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2r_q}{m \cdot s_q^2} \right)} \right) \quad (7.39)$$

Dicha solución puede escribirse como (7.40),

$$\frac{2E_s}{N_0} \cdot b_q = -\frac{1}{s_q^2} + m + m \sqrt{1 + \left(\frac{2r_q}{m \cdot s_q^2} \right)} \quad (7.40)$$

que, para LOS bajo conduce de nuevo al water-filling estadístico, y para LOS moderado o significativo conduce aproximadamente a (7.41).

$$\frac{2E_s}{N_0} \cdot b_q = -\frac{1}{s_{0q}^2} + m \quad \text{donde} \quad s_{0q}^2 = \frac{s_q^2}{1 - r_q^{1/2}} \quad (7.41)$$

Como en otras ocasiones, el parámetro μ se ajusta para verificar la condición de energía total transmitida lo que podría originar que no todas la entradas de la matriz fuesen diferentes de cero. Asumiendo por more de la comparación que la energía transmitida es suficientemente alta como para activar todos los modos, entonces el parámetro μ viene dado por (7.42).

$$m = \frac{E_T \cdot N}{E_s \cdot n_s \cdot n_T} + \frac{1}{n_T} \sum_{q=1}^{n_T} s_{0q}^{-2} \quad (7.42)$$

La tasa de error promedio es (7.43) donde, de nuevo, se puede apreciar la presencia del termino en el numerador como consecuencia de la presencia de LOS

$$\Pr_{CSI}^{LOS} (\underline{I}_0 \Rightarrow \underline{I}_e) = k_1 \cdot \frac{\exp \left\{ - \sum_{a=1}^{n_T} |h(q)|^2 \cdot \frac{(2E_s / N_0) (m - s_{0q}^{-2})}{1 + (2E_s / N_0) (m - s_{0q}^{-2}) \cdot s_q^2} \right\}}{\prod_{q=1}^{n_T} (1 + (2E_s / N_0) (m - s_{0q}^{-2}) \cdot s_q^2)} \quad (7.43)$$

En lo que se refiere a la comparación de existencia de CSI o ausencia de este, la comparación de (7.43), tasa de error promedio con CSI, y (7.37), tasa de error promedio sin CSI, la comparación revela que el parámetro a de la expresión sin CSI mejora según (7.44) debido a la disponibilidad de CSI.

$$a = \frac{2E_T}{N_0} \frac{N}{n_s \cdot n_T} \Rightarrow (2E_s / N_0) (m - s_{0q}^{-2}) \approx a + \left(\frac{2E_s}{N_0 \cdot n_T} \right) \sum_{q=1}^{n_T} \frac{r_q}{s_q^2} \quad (7.44)$$

Es interesante que las conclusiones guarden una gran similitud siempre, CSI es interesante para altas $E_s N_0$ y/o bajo número de antenas en el transmisor. El término nuevo es que la contribución de CSI se materializa en el cociente entre la energía LOS del canal y la varianza correspondiente todo y teniendo presente la validez de la

aproximación realizada y que la mejora se satura para varianzas diferentes de cero y cambia de forma cuando esta es cero.

VII.8. RESUMEN.

El presente capítulo ha descrito el detector ML en sistemas MIMO, o mas concretamente las medidas de calidad que le caracterizan. Tanto a nivel instantáneo como a nivel promedio (también denominado régimen ergodico) se ha descrito la tasa de error correspondiente, así como el diseño óptimo del transmisor en los casos de CSI disponible y no disponible. Tanto las medidas como el análisis y diseño serán de gran utilidad en la lectura del siguiente capítulo en codificación espacio temporal. Mas aun, la estructura unitaria de la denominada matriz de constelación, en uno múltiples accesos al canal, se revelara como un Standard en el pre-procesado lineal en el transmisor como en sistemas de codificación espacio-tiempo.

En ultimo lugar, ha de destacarse el análisis presentado para canal MIMO con LOS como, no ya una explicación mas plausible de lo que ocurre en entornos radio, sino que, al mismo tiempo, como una oportunidad extraordinaria de llegar a niveles de calidad y capacidad elevados tanto en situación de CSI disponible como no en el transmisor.

VII.9. REFERENCIAS.

- [1] - S. Zhou, G.B. Giannakis. "Optimal transmitter eigen-beamforming and space-time block coding based on channel correlations". IEEE-IT, Vol. 49, no. 7, pp. 1673-1690. July 2003.
- [2] - D. Perez, J. Chioffi, M.A. Lagunas. "Uniform power allocation on MIMO channels: A game theoretic approach". IEEE-IT, Vol. 49, No. 7, pp. 1707-1728, July 2003.
- [3] - D. Perez, J. Chioffi, M.A. Lagunas. "Joint TX-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: A unified framework for convex optimization". IEEE-SP, Vol. 51, No. 9, pp. 2381-2401, September 2003. (Also IEEE-SP May 2004)
- [4] -X. Cai, G.B. Giannakis, M.D. Zoltowski. "Space-time spreading and block coding for correlated fading channels in the presence of interference". IEEE-COM, Vol. 53, No. 3, pp. 515-525, March 2005.